Aula 27

Séries de Fourier

A resolução do problema de valor inicial para a equação do calor, pelo **método de separação de variáveis**, com **condições de fronteira de Dirchlet homogéneas**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \\ \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{cases}$$

leva ao **problema de valores e funções próprias**, em que se procuram soluções não triviais de

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda\, X(x) \\ \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

que são

$$X_n(x) = C \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{para} \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

As correspondentes soluções da equação do calor obtidas por separação de variáveis são então

$$X_n(x)T_n(t) = C \,\text{sen}\, \left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

e a solução geral, com condições de fronteira nulas, obtida por "combinação linear infinita" destas, é da forma

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \,\text{sen}\, \left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}}$$

Para acertar a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ põe-se finalmente a questão de como representar uma função
$f : [0,L] \to \mathbb{R}$
"arbitrária" como uma série de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \,\text{sen}\, \left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ????$$

Analogamente, a resolução do problema de valor inicial da equação do calor homogénea com **condições de fronteira de Neumann homogéneas** (barra com extremidades isoladas)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{cases}$$

leva ao **problema de valores e funções próprias**,

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda\, X(x) \\ \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são agora

$$X_0(x) = C \cdot 1 \quad \text{para} \quad \lambda_0 = 0,$$

e

$$X_n(x) = C \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{para} \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A solução geral da equação do calor com condições de fronteira com derivadas nulas, correspondentes às extremidades da barra isoladas termicamente, pelo método de separação de variáveis, é assim

$$\boxed{u(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t}}$$

E neste caso, para acertar a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ põe-se a questão de como representar uma função

$$f : [0, L] \to \mathbb{R}$$

"arbitrária" como uma série de cosenos

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ????$$

Mais geralmente, a questão põe-se de como representar uma "função arbitrária" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como uma série de senos e cosenos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Relações de Ortogonalidade

$$\int_{-L}^{L} \mathsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathsf{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \mathsf{se} \quad n, m \geq 1$$

$$\int_{-L}^{L} \mathsf{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathsf{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \mathsf{se} \quad n \neq m \geq 1 \\ L & \mathsf{se} \quad n = m \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \mathsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathsf{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \mathsf{se} \quad n \neq m \geq 1 \\ L & \mathsf{se} \quad n = m \geq 1 \end{cases}$$

Coeficientes de Fourier de uma função f

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, \mathsf{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, \mathsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n \geq 1$$

Teorema (Fourier/Dirichlet): Dada uma função f periódica, de período $2L$, seccionalmente C^1 em $[-L, L]$, a sua série de Fourier converge em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ para a média dos limites laterais, ou seja

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

- Se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

- Se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$