

Aula 27

Séries de Fourier

A resolução do problema de valor inicial para a equação do calor, pelo **método de separação de variáveis**, com **condições de fronteira de Dirchlet homogéneas**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad t > 0 \end{array} \right.$$

leva ao **problema de valores e funções próprias**, em que se procuram soluções não triviais de

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{array} \right.$$

que são

$$X_n(x) = C \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{para} \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

As correspondentes soluções da equação do calor obtidas por separação de variáveis são então

$$X_n(x)T_n(t) = C \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t}$$

e a solução geral, com condições de fronteira nulas, obtida por “combinação linear infinita” destas, é da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t}$$

Para acertar a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ põe-se finalmente a questão de como representar uma função

$$f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$$

“arbitrária” como uma série de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{????}$$

Analogamente, a resolução do problema de valor inicial da equação do calor homogénea com **condições de fronteira de Neumann homogéneas** (barra com extremidades isoladas)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad t > 0 \end{array} \right.$$

leva ao **problema de valores e funções próprias**,

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{array} \right.$$

cujas soluções são agora

$$X_0(x) = C \cdot 1 \quad \text{para} \quad \lambda_0 = 0,$$

e

$$X_n(x) = C \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{para} \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A solução geral da equação do calor com condições de fronteira com derivadas nulas, correspondentes às extremidades da barra isoladas termicamente, pelo método de separação de variáveis, é assim

$$u(x, t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

E neste caso, para acertar a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ põe-se a questão de como representar uma função

$$f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$$

“arbitrária” como uma série de cosenos

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{????}$$

Mais geralmente, a questão põe-se de como representar uma “função arbitrária” $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como uma série de senos e cosenos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Relações de Ortogonalidade

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = 0 \quad \text{se } n, m \geq 1$$

$$\int_{-L}^L \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \geq 1 \\ L & \text{se } n = m \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \geq 1 \\ L & \text{se } n = m \geq 1 \end{cases}$$

Coeficientes de Fourier de uma função f

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n \geq 1$$